Лекція 13

Основи теорії логічних схем

Мета лекції: вивчення основ бульової алгебри.

План лекції:

13.1 Вступ

13.2 Основні закони бульової алгебри

13.3 Форми представлення бульових функцій

13.4 Перехід від бульових функцій до структурних схем

13.5 Функціонально повна система логічних схем

13.6 Контрольно – навчальний тест до лекції 13.

13.1 Вступ.

Аналіз та синтез логічних кіл та пристроїв виконується на основі математичного апарату алгебри логіки, або булевої алгебри. Згідно цієї алгебри логіки над змінними, що можуть приймати виключно значення «1» та «0», можуть виконуватися три основні дії: логічне додавання, логічне множення та логічне заперечення, що відповідає логічним функціям «АБО», «І», «НЕ», позначення яких наведені на рис. 13.1

Операція логічного додавання (диз'юнкція) позначається символом «+» або «$\vee$». Дана операція відповідає логічному «АБО». В якості прикладу кола, що реалізує функцію «АБО», можна навести паралельне з'єднання замикаючих контактів декількох реле. Коло, до якого входять ці контакти, буде замкненим, якщо спрацює хоча б одне реле. Таким чином логічна сума дорівнює одиниці тоді, коли хоча б один з його доданків відмінний від нуля.

$$F = a + b + c \ldots \Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 = 0; \\ 0 + 1 = 1; \\ 1 + 1 + \ldots + 1 = 1; \\ 0 + 0 + \ldots. + 0 = 0; \end{cases}$$

Операція логічного множення (кон'юнкція) позначається символом «.» або «$\wedge$». Операція відповідає логічному «І». Функцію «І» можна реалізувати, наприклад, з'єднанням послідовно замкнених контактів декількох реле. В такому випадку коло буде замкнене лише у випадку коли спрацюють всі реле.

$$F = a \cdot b \cdot \ldots \cdot c = \begin{cases} 0 \cdot 0 = 0; \\ 0 \cdot 1 = 0; \\ 1 \cdot 1 = 1; \end{cases}$$

Операція логічного заперечення (інверсія) позначається рискою або штрихом над позначенням аргументу. Операція відповідає логічному «НІ». Інверсія одиниці дорівнює нулю, і навпаки. Подвійна інверсія не змінює значення змінної: $F = \bar{a}$ $\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$ $\bar{\bar{0}} = 0$ $\bar{\bar{1}} = 1$

Нижче наведена таблиця, що систематизує основні операції:

Таблиця.13.1 Операції логічного додавання (АБО) і множення (І)

Вхідні дані		Результат	
a	b	«АБО»	«І»
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

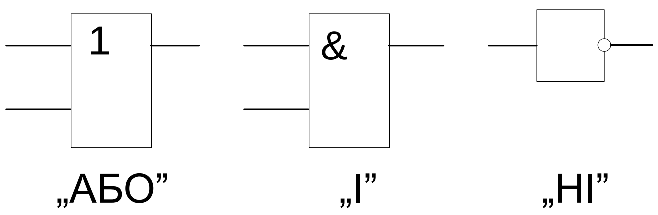

Рисунок 13.1 – Позначення основних логічних елементів.

Одним із базових понять алгебри логіки є принцип подвійності: якщо в операції «АБО» одиниці замінити нулями, а нулі одиницями, а знак + на •, то отримаємо таку ж саму функцію але з запереченням. Найважливішою практичною властивістю принципу подвійності є те, що при записі логічних виразів, та, відповідно, при побудові логічних схем, можна скористатися лише двома типами логічних операцій, наприклад «І» та «НІ», або «АБО» і «НІ». Докладніше це питання розглянуто в пункті 13.5

13.2 Основні закони бульової алгебри.

При операції над однією змінною:

1. $X + 0 = X$	5. $X \cdot 0 = 0$
2. $X + 1 = 1$	6. $X \cdot 1 = X$
3. $X + X = X$	7. $X \cdot X = X$
4. $X + \overline{X} = 1$	8. $X \cdot \overline{X} = 0$
	9. $\overline{\overline{X}} = X$

Теореми та закони для двох та більше змінних:

10. $x + y = y + x \quad xy = yx$ (переставний закон)
11. $x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z;$
    $x \cdot y \cdot z = x(y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$ (сполучний закон)
12. $x(y + z) = xy + xz; \quad x + yz = (x + y)(x + z);$ (розподільний закон)
13. $x + xy = x; \quad x(x + y) = x;$ (закон поглинання)
14. $(x + \overline{y})y = xy; \quad x\overline{y} + y = x + y;$ (закон скорочення)
15. $xy + \overline{x}y = y; \quad (x + y)(\overline{x} + y) = y$ (закон склеювання)
16. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}; \quad \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y};$ (теорема де Моргана)

13.3 Форми представлення бульових функцій.

Задати бульову функцію – це означає вказати функції («0» чи «1») при всіх можливих комбінаціях значень аргументів. Кожну конкретну комбінацію значень всіх аргументів називають *набором*. Для короткої форми запису набору використовують запис у вигляді двоїчного числа, цифрами якого є значення змінних у визначеному порядку, як правило алфавітному. Таким чином замість запису А=0, В=1, С=1, отримуємо компактний запис 011. Двоїчне число, що представляє набір називають *номером набору*. В нашому випадку $N = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$ -- третій набір.
При n аргументах існує 2^n наборів, при $n = 3$ наборів буде 8.
Якщо функція визначена на всіх наборах, вона називається *повністю визначеною*, якщо на деяких наборах значення функції не задано – *частково визначеною.*

Існують різні способи задання бульових функцій.

1. Представлення на словах. Наприклад функція трьох аргументів приймає значення «1», якщо два будь які аргументи або всі три дорівнюють одиниці. У всіх інших випадках функція дорівнює нулю (мажоритарна функція).
2. Табличний спосіб. Функція представлена у вигляді таблиці, в якій виписуються всі можливі набори аргументів у порядку зростання їх

номерів. Для кожного набору встановлюється значення функції «0» або «1». Для мажоритарної функції таблиця приймає вигляд:

Таблиця.13.2 Таблична форма представлення мажоритарної функції

Номера наборів	A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

3. Алгебраїчний спосіб. Існують дві форми функцій в алгебраїчному вигляді, що називаються нормальними. Перша диз’юнктивна нормальна форма (ДНФ) представляє собою суму елементарних логічних добутків, в кожній з яких аргумент чи його заперечення входить не більше одного разу.

$$F(A,B,C) = A\overline{B} + BC + \overline{A}\overline{B}C$$

Якщо кожний доданок містить усі змінні чи їх заперечення, маємо першу стандартну форму або досконалу диз’юнктивну нормальну форму (ДДНФ):

$$F(A,B,C) = A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C}$$

Друга форма, чи кон’юктивна нормальна форма (КНФ), - логічний добуток елементарних логічних сум, коли кожна сума містить всі змінні чи їх заперечення, маємо другу стандартну форму або досконалу кон’юктивну нормальну форму (ДКНФ):

$$F(A,B,C) = (A + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

Перехід від таблиці до першої стандартної форми здійснюється так: для кожного набору, на якому функція дорівнює одиниці, записуємо елементарний добуток усіх елементів, причому якщо аргумент в цьому наборі приймає значення «0», пишемо його заперечення.

$$F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Цю процедуру називають складанням структурної форми за одиницями. Для переходу до другої стандартної форми необхідно для кожного набору, на якому функція дорівнює нулю, скласти елементарну суму, до того ж, якщо аргумент в цьому наборі приймає значення «1», пишеться його заперечення. Потім елементарні суми об’єднуються операцією логічного множення:

$$F(A,B,C) = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

Таку процедуру називають складанням структурної формули за нулями.

4. Числовий спосіб. Для числового способу представлення функції в першій стандартній формі під знаком суми перераховуються номера наборів, на яких функція дорівнює одиниці.
Наприклад, для мажоритарної функції $F(a,b,c) = \sum(3,5,7)$.
Для другої стандартної форми під знаком добутку перераховуються номера наборів, на яких функція дорівнює нулю.

13.4 Перехід від бульових функцій до структурних схем і навпаки.

До цього часу ми вели розмову про функції алгебри логіки не торкаючись структури логічного пристою. Варто пам’ятати що ФАЛ (функція алгебри логіки) однозначно визначає структуру логічного пристрою. Якщо ми маємо у своєму розпорядженні набір функціональних вузлів, що реалізують основні логічні функції (складають функціонально повну систему), то за їх використанням можна побудувати логічну схему що виконує заданий алгоритм перетворення вхідних логічних змінних.
Згідно з переліком логічних операцій, зазначеному в п. 13.1 існує три базові логічні операції: «І», «АБО», «НІ». Також при переході до проектування логічних схем варто пам’ятати, що число входів елементів «І», «АБО» може бути довільним, в той час як елемент «НІ» має завжди один вхід.
Для побудови логічної схеми варто логічні елементи, що виконують передбачені логічні операції, зазначені в ФАЛ, розміщувати від входу до виходу пристрою в порядку, зазначеному булоьвим виразом.

В якості прикладу побудови логічної схеми побудуємо логічну схему до ФАЛ, що визначена у таблиці 13.3. Якщо зважити на вищезазначені принципи побудови та застосувати їх для нашого випадку отримаємо структурну схему, зазначену на рис. 13.2 .

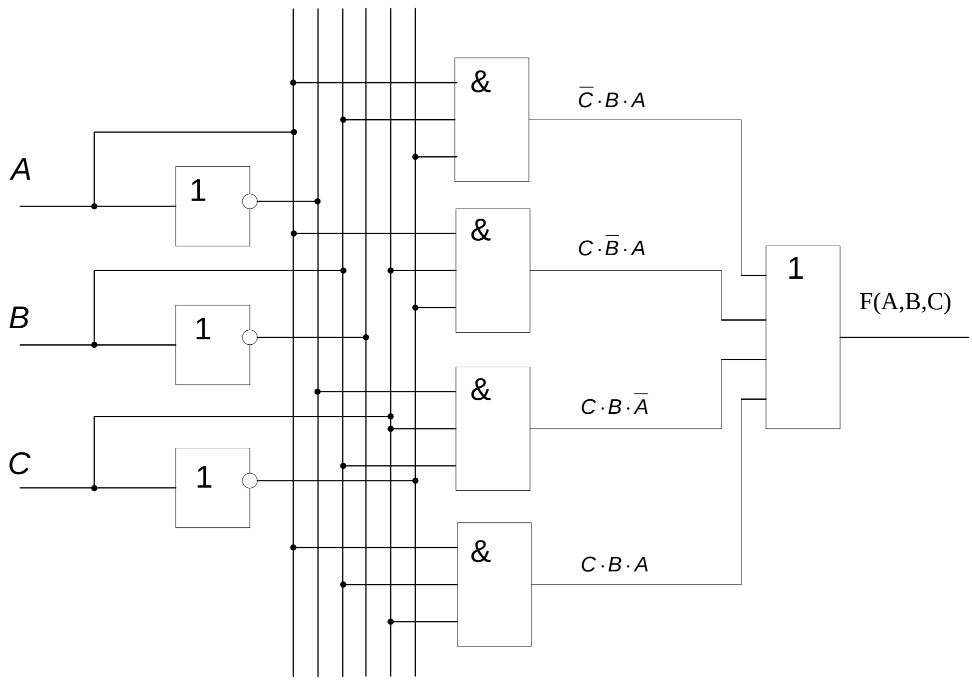

Рисунок 13.2 Структурна схема реалізації мажоритарної функції.

Перехід від структурних схем до функцій алгебри логіки відбувається в оберненому порядку.

13.5 Функціонально повна система логічних схем – це такий набор схем (елементів), за використання якого можна реалізувати будь – яку логічну функцію довільного ступеня складності.

Оскільки кожна логічна функція є комбінацією найпростіших функцій (диз’юнкції, кон’юнкції та інверсії, то набір з елементів трьох типів, що реалізують відповідну функцію «І», «АБО», «НІ» відповідно є функціонально повним. Наприклад функцію $a\overline{b}+\overline{a}b$ можна реалізувати за допомогою двох комірок «НІ» (що потрібні для отримання інверсії $\overline{a}$ та $\overline{b}$), двох комірок «І», необхідних для того, щоб отримати логічні добутки $a\overline{b}$ та $\overline{a}b$, і комірки «АБО», що додає ці добутки.

Функціонально повні системи можуть складатися з набору елементів, що реалізують логічні функції, відмінні від найпростіших.

Загалом виділяють п’ять функціонально повних систем:

1 «АБО», «І», «НІ» (повний набір)
2 «АБО», «НІ»
3 «І», «НІ»
4 «АБО – НІ»
5 «І – НІ»

Покажемо що набори елементів 2 – 5 дозволяють побудувати функціонально повну систему елементів і, відповідно, реалізувати довільну ФАЛ.

Так, якщо маємо два логічні елементи «АБО» і «НІ», для отримання третього елементу «І» необхідно побудувати схему рис. 13.3 (а).

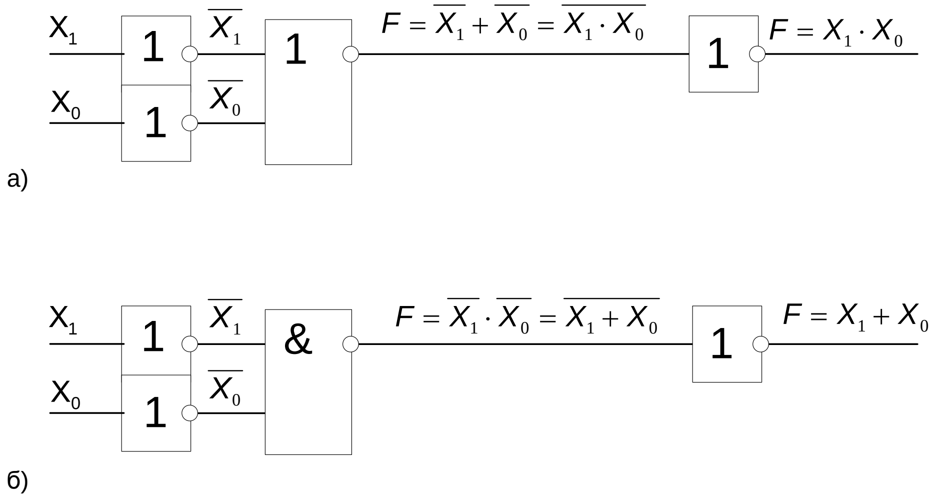

Рисунок 13.3 – Організація основних логічних операцій на основі наборів «АБО», «НІ» (а) та «І», «НІ» (б).

Якщо маємо набір із двох елементів «І», «НІ», то для отримання функціонально повної системи елементів необхідно побудувати елемент «АБО», так як показано на рис. 13.3 (б).

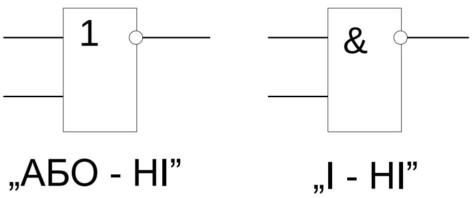

Рисунок 13.4 – Позначення логічних елементів.

Функція «АБО – НІ», що також дістала назву функції Пірса або функції Вебба, означає, що $F = \overline{a + b + c + ...}$ Якщо маємо один елемент «АБО – НІ» (рис. 13.4), то він є універсальним елементом, оскільки дозволяє побудувати елементи «АБО», «І», «НІ» за схемою, наведеною на рис. 13.5

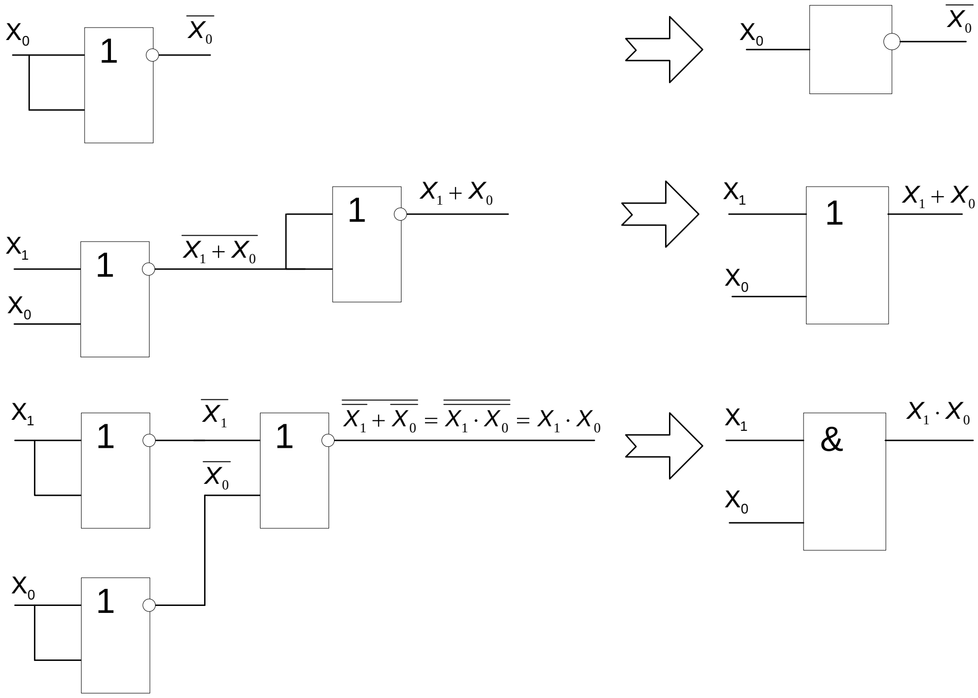

Рисунок 13.5 – Організація основних логічних операцій на основі елементів «АБО – НІ».

Для отримання інверсії однієї змінної (операція «НІ») достатньо подати сигнал, що відповідає цій змінній на обидва входи кола «АБО – НІ».

Функція «АБО» може бути реалізована шляхом інвертування вихідного сигналу кола «АБО – НІ».

Функція «І» реалізується за допомогою комірок «АБО – НІ» на основі закону заперечення $\overline{\overline{a} + \overline{b}} = ab$. Можливість реалізації найпростіших логічних функцій говорить про універсальність логічних елементів «АБО – НІ».

Функція «І – НІ», що також носить назву Шиффера, означає таке перетворення: $F = \overline{abc...}$ Елемент «І – НІ» (рис 13.4) також є універсальним елементом. Формування основних логічних операцій на основі елементів «І – НІ» наведено на рис. 13.6

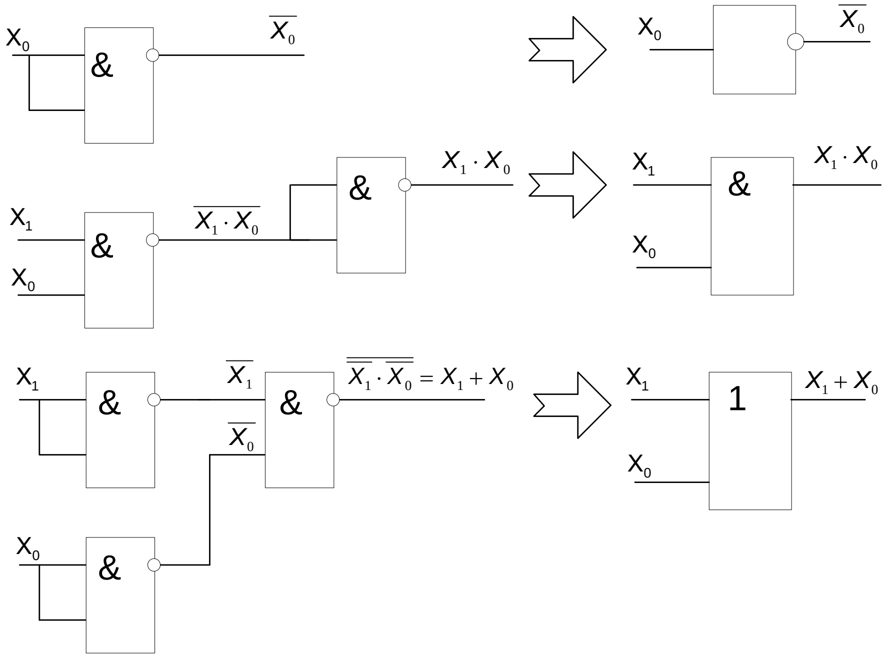

Рисунок 13.6 – Організація основних логічних операцій на основі елементів «І – НІ».

Функцію «НІ», тобто інвертування змінної, можна реалізувати, якщо сигнал відповідний цій змінній, подати на один із входів кола «І – НІ», а на всі інщі входи подати постійний сигнал, що б відповідав одиниці: $\overline{a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1} = \overline{a}$, або подати вхідний сигнал на два входи елемента «І—НІ».

Для утворення кола «І» достатньо увімкнути послідовно коло «І – НІ» і інвертор: $\overline{\overline{ab}} = ab$.

Коло «АБО» будується у відповідності за правилом де Моргана: $\overline{ab} = \overline{a} + \overline{b}$. Таким чином, кола «І – НІ» дозволяють реалізувати інверсію, кон’юнкцію та диз’юнкцію, а відповідно, на їх основі можна формувати логічні кола для реалізації функцій довільного ступеня складності.

13.6 Контрольно – навчальний тест до лекції 13.

Питання 13.1
Застосовуючи принцип подвійності перетворіть функцію $F = x + y + z$ в іншу.

Вибір правильної відповіді:
1 – $x \cdot y \cdot z = F$
2 – $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = \overline{F}$
3 – $\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = F$

Питання 13.2
Що таке закон «склеювання»?

Вибір правильної відповіді:
1 – $xy + \overline{x}y = y;$
2 – $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y};$
3 – $x(y + z) = xy + xz;$

Питання 13.3
Що таке закон де Моргана?

Вибір правильної відповіді:
1 – $x + y = b + y$
2 – $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y};$
3 – $x\overline{y} + y = x + y;$

Питання 13.4
Що таке закон поглинання?

Вибір правильної відповіді:
1 – $x + xy = x;$
2 – $x(y + z) = xy + xz;$
3 – $X \cdot \overline{X} = 0$

Питання 13.5
Визначити номер набору коли дано: A=1, B=0, C=1.

Вибір правильної відповіді:
1 – 2
2 – 4
3 – 5

Питання 13.6
Що таке досконала кон'юктивна нормальна форма (ДКНФ)?

Вибір правильної відповіді:
1 – $F(A,B,C) = (A + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$
2 – $F(A,B,C) = A\overline{B} + BC + \overline{A}\overline{B}C$
3 – $F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

Питання 13.7
Що таке досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)?

Вибір правильної відповіді:
1 – $F(A,B,C) = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B)$
2 – $F(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$
3 – $F(A,B,C) = A\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}$

Питання 13.8
Оберіть систему що не є функціонально повною.

Вибір правильної відповіді:
1 – *«АБО», «НІ»*
2 – *«НІ – І»*
3 – *«АБО – НІ»*