

## Лекція 14

### Мінімізація булевих функцій

**Мета лекції:** навчитися мінімізувати булеві функції як алгебраїчним способом, так і з використанням карти Карно

#### План лекції:

14.1 Вступ

14.2 Алгебраїчний спосіб мінімізації булевих функцій

14.3 Метод Карно (карта Карно)

14.4 Синтез комбінаційних пристроїв

14.5 Контрольно-навчальний тест до лекції 14

#### 14.1 Вступ

В теорії логічних схем логіка роботи елементів, вузлів чи пристроїв в цілому відображається алгебраїчними формулами, що дає можливість визначити значення вихідних двоїчних змінних в цій схемі при всіх можливих комбінаціях вхідних двоїчних змінних; а при синтезі логічної схеми - перетворити формулу до вигляду, відповідно до найбільш простої логічної схеми. В більшості випадків намагаються отримати схему, яка вміщує мінімальну кількість елементів, тому перетворення формул називають мінімізацією цих формул та відповідних до них схем.

Для мінімізації функції найбільш ефективним і часто використовуваним є закон склеювання й закон поглинання:

$xu + \bar{x}u = u$ ;  $x + x\bar{u} = x$ , де під  $x$ ,  $u$  розуміють будь-які функції. Для зручності склеювання вводять доданки, які є у вихідній структурній формулі.

При використанні карти Карно функцію заздалегідь слід привести до диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) - виразити у вигляді логічної суми простих кон'юнкцій. При цьому простою кон'юнкцією вважається логічний добуток змінних, узятих із запереченнями або без них, в якому кожна змінна зустрічається не більше одного разу (у просту кон'юнкцію не повинні

входити суми змінних, заперечення функцій двох або декількох змінних). Проста кон'юнкція, в яку входять всі аргументи даної логічної функції, називається мінтермом.

## 14.2 Алгебраїчний спосіб мінімізації булевих функцій

Перед початком мінімізації булевої функції необхідно представити її в вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ).

Приклад 1. Для функції

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

помічаємо, що четвертий доданок  $ABC$  є сусіднім з будь-яким з перших трьох, тому додаємо його два рази :

$$F = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC + ABC + ABC.$$

Шляхом попарного склеювання отримаємо ту ж саму функцію, але в мінімізованій формі

$$F = AB + BC + AC, \text{ а також схему рис.14.1.}$$

Кількість змінних (з запереченням чи без заперечення), які входять в доданок, називається його рангом. Наприклад,  $AB$  мають другий ранг.

При великій кількості змінних алгебраїчний спосіб мінімізації функції є складним і тому застосовують різні способи систематизації доданків, які полегшують їх склеювання, наприклад карти Карно.

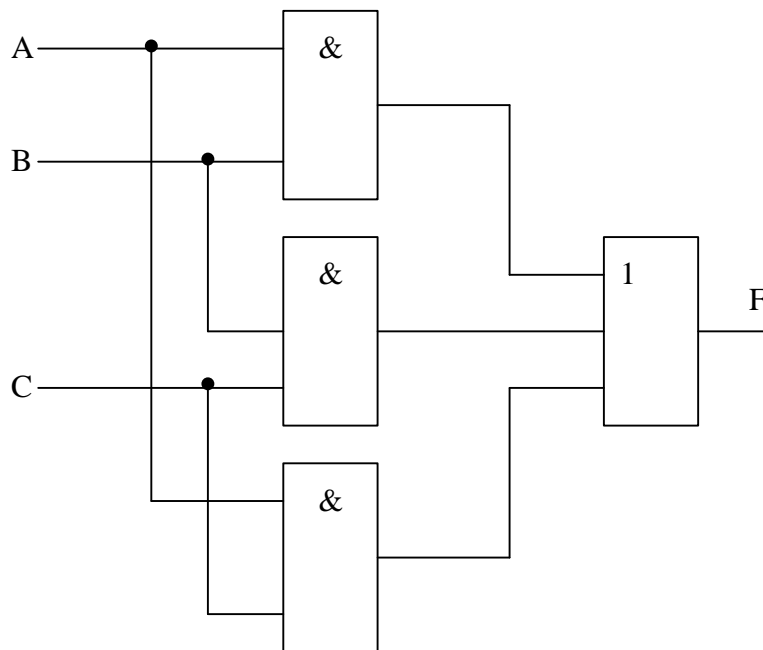


Рисунок 14.1 - Логічна схема після мінімізації функції F

### 14.3 Метод Карно (карта Карно)

Карта Карно представляє собою прямокутну таблицю, розбиту на квадрати, кількість яких дорівнює загальній кількості наборів для даної функції для  $n$  змінних маємо  $2^n$  набори, тобто для  $n = 4$  їх 16. Кожний квадрат відповідає визначеному набору, причому вони розташовуються так, щоб сусідні доданки відповідали сусіднім квадратам на карті. Функцію в першій стандартній формі наносять на карту, відмічаючи знаком "1" квадрати, які відповідають тим наборам, на яких функція дорівнює одиниці, інші квадрати відмічають знаком "0" або залишають без позначки.

На рис. 14.2 показана карта Карно для чотирьох змінних.

	$AB$	$A\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
$CD$				
$C\bar{D}$				
$\bar{C}\bar{D}$				
$\bar{C}D$				

Рисунок 14.2 - Карта Карно для чотирьох змінних

Позначення стовпчиків і рядків робиться таким чином, щоб сусідні відрізнялись незначно і тільки на одну риску. Причому крайній лівий і правий стовпчики вважаються сусідніми, також перший і останній рядки теж сусідні.

Після нанесення одиниць на карту їх обводять контурами. Вимоги такі:

1. Контур має бути прямокутником
2. Контур має охоплювати кількість одиниць тільки ту, що дорівнює 2, 4, 8, 16 і т.п.
3. Одна і та ж одиниця може знаходитись в різних контурах
4. Контури повинні бути якомога більшого розміру
5. Кількість контурів повинна бути мінімальною.

Використовуючи закон склеювання для кожного контуру записують мінімальний бульовий вираз і таким чином отримують мінімальну бульову функцію.

Приклад 2. Дана функція

$$F = \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD} + \overline{ABCD}$$

Наносимо цю функцію на карту Карно (рис. 14.3) і проводимо можливі контури

	$AB$	$A\bar{B}$	$\bar{A}B$	$\bar{A}\bar{B}$
$CD$	1	1		1
$C\bar{D}$		1		
$\bar{C}D$	1	1	1	1
$\bar{C}\bar{D}$			1	1

Рисунок 14.3 - Мінімізація бульової функції до прикладу 2

Після склеювання із чотирьох контурів отримаємо значно простішу мінімальну бульову функцію

$$F = \bar{A}\bar{C} + \bar{C}\bar{D} + BCD + \bar{A}BC$$

#### 14.4 Синтез комбінаційних пристроїв

Розглянута мінімізація логічних функцій є одним з етапів синтезу логічних ланцюгів. В цілому процес синтезу можна проводити в такій послідовності. Спочатку складається таблиця функціонування логічного пристрою - таблиця істинності. Ця таблиця показує, чому дорівнює вихідний сигнал пристрою при різних можливих поєднаннях вхідних сигналів. Потім виходячи з таблиці істинності записується сама логічна функція (за наявності деякого досвіду логічну функцію досить часто вдається написати відразу, минувши етап складання таблиці функціонування). Після цього логічну функцію мінімізують, наприклад за картами Карно, і перетворюють до вигляду, зручного для реалізації логічного пристрою.

Приклад 3. Порівняти два двохрозрядних числа

$$A \rightarrow a_1a_0$$

$$B \rightarrow b_1b_0$$

Заповнюємо спочатку таблицю істинності (таблиця 14.1)

Таблиця 14.1. Логічна функція порівняння двох чисел

№ наб	$a_1a_0$	$b_1b_0$	$F(A>B)$
0	00	00	0
1	00	01	0
2	00	10	0
3	00	11	0
4	01	00	1
5	01	01	0
6	01	10	0
7	01	11	0
8	10	00	1
9	10	01	1
10	10	10	0
11	10	11	0
12	11	00	1
13	11	01	1
14	11	10	1
15	11	11	0

Користуючись таблицею 14.1, можна написати логічну функцію, яку повинен реалізувати пристрій. Для цього потрібно представити цю функцію у вигляді суми мінтермів, відповідних тим рядкам таблиці 14.1, для яких функція  $F$  рівна одиниці. При записі мінтермів, тобто кон'юнкцій, в які входять всі аргументи функції, слід брати відповідний аргумент з інверсією або без інверсії залежно від того, чому він дорівнює в даному рядку таблиці функціонування - нулю або одиниці.

Так для таблиці 14.1 маємо

$$F_{A>B} = \bar{a}_1\bar{a}_0\bar{b}_1\bar{b}_0 + a_1\bar{a}_0\bar{b}_1\bar{b}_0 + a_1\bar{a}_0\bar{b}_1b_0 + a_1\bar{a}_0b_1\bar{b}_0 + a_1\bar{a}_0b_1b_0 + a_1a_0\bar{b}_1\bar{b}_0 + a_1a_0\bar{b}_1b_0 + a_1a_0b_1\bar{b}_0 + a_1a_0b_1b_0.$$

Мінтерми цієї функції позначаємо на карті Карно (рис. 14.4)

	$a_1a_0$	$a_1\bar{a}_0$	$\bar{a}_1a_0$	$\bar{a}_1\bar{a}_0$
$b_1b_0$				
$b_1\bar{b}_0$	1			
$\bar{b}_1\bar{b}_0$	1	1		1
$\bar{b}_1b_0$	1	1		

Рисунок 14.4 - Карта Карно до прикладу 3

Спрощуючи за допомогою цієї карти Карно (рис. 14.4), знаходимо мінімізований вираз:

$$F A > B = a_1 \bar{b}_1 + a_1 a_0 \bar{b}_0 + a_0 \bar{b}_1 b_0$$

Логічна схема після мінімізації зображена на рис. 14.5

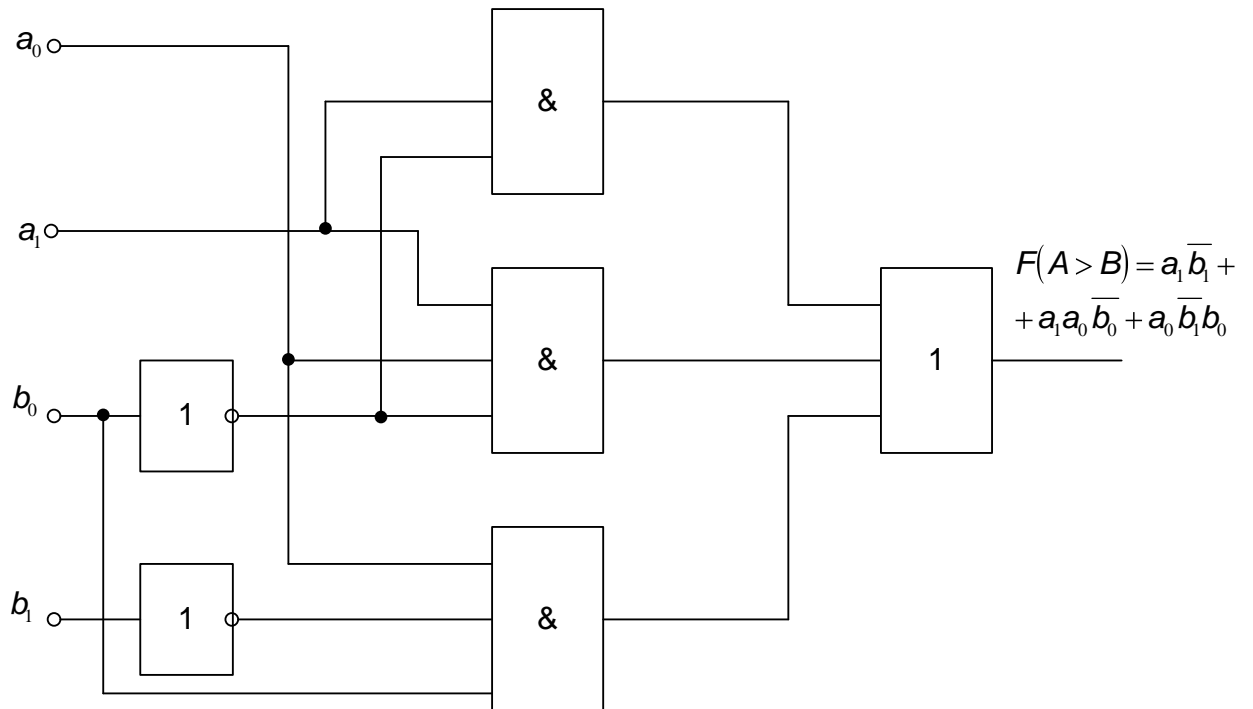


Рисунок 14.5 - Логічна схема після мінімізації функції  $F A > B$

Приклад 4. Розробити автоматичний пристрій, що реагує:

- а) на парні числа 0-15
- б) на парні числа 0-10

Заповнюємо таблицю істинності (таблиця 14.2)

Таблиця 14.2 Логічна функція автоматичного пристрою

№ наб	$a_3a_2$	$a_1a_0$	$F_A$	$F_B$
0	00	00	1	1
1	00	01	0	0
2	00	10	1	1
3	00	11	0	0
4	01	00	1	1
5	01	01	0	0
6	01	10	1	1
7	01	11	0	0
8	10	00	1	1
9	10	01	0	0
10	10	10	1	1
11	10	11	0	0
12	11	00	1	0
13	11	01	0	0
14	11	10	1	0
15	11	11	0	0

Побудуємо карту Карно (рис 14.6)

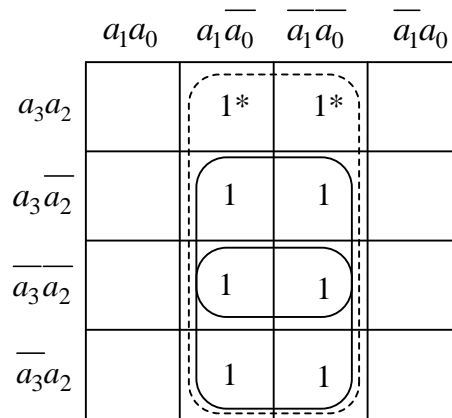


Рисунок 14.6 - Карта Карно до прикладу 4

Спрощуючи за допомогою карти Карно (рис. 14.6), знайдемо мінімізований вираз:

$$F_A = \overline{a_0}$$

$$F_B = \overline{a_2}a_0 + \overline{a_3}a_0 = \overline{a_0} (\overline{a_2} + \overline{a_3})$$

Логічні схеми після мінімізації функцій  $F_A$  і  $F_B$  зображені на рис. 14.7

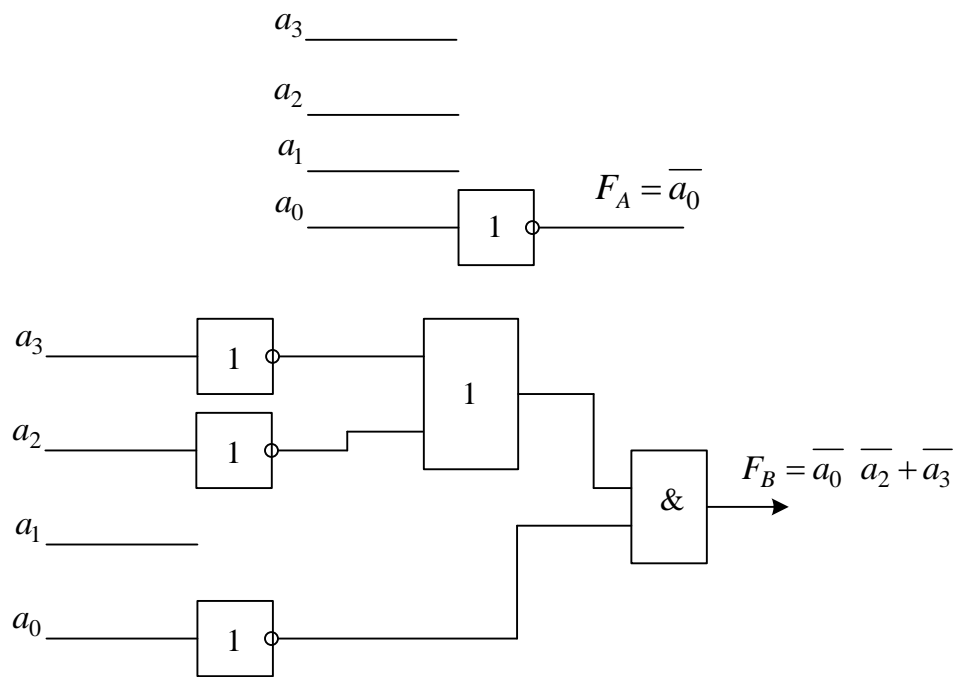


Рисунок 14.7 - Логічні схеми для функцій  $F_A$  і  $F_B$

З цих рисунків видно, як суттєво змінюються схеми при незначній зміні діапазону виявлення парних чисел.



## 14.5 Контрольно – навчальний тест до лекції 14.

### Питання 14.1

Що таке закон «склеювання»?

**Вибір правильної відповіді:**

1 –  $xy + \overline{xy} = y$ ;

2 –  $x(y + z) = xy + xz$ ;

3 –  $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ ;

### Питання 14.2

Що таке закон «поглинання»?

**Вибір правильної відповіді:**

1 –  $x(y + z) = xy + xz$ ;

2 –  $x + xy = x$ ;

3 –  $X \cdot \overline{X} = 0$

### Питання 14.3

В яку із форм представлення треба перевести бульову функцію при використанні алгебраїчного способу мінімізації?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – ДНФ або КНФ

2 – ДДНФ або ДКНФ

### Питання 14.4

В яку із форм представлення треба перевести бульову функцію при використанні карти Карно?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – ДНФ

2 – ДКНФ

3 – ДДНФ або ДКНФ

### Питання 14.5

Скільки клітинок повинна мати карта Карно?

**Вибір правильної відповіді:**

1 –  $2 \cdot n$

2 –  $2^n$

3 –  $2^{n-1}$

### Питання 14.6

Скільки одиниць може попадати в контур карти Карно?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – 1, 3, 9, 21 и т.п.

2 – 2, 4, 8, 16 и т.п.

### Питання 14.7

Якою може бути форма контуру карти Карно?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – будь-якою

2 – трикутною

3 – прямокутною

### Питання 14.8

Яка можлива взаємодія контурів карти Карно?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – можуть перетинатись

2 – не можуть перетинатись

**Питання 14.9**

Що краще на карті Карно, два контура чи один, що їх об'єднує для мінімізації бульових функцій?

**Вибір правильної відповіді:**

1 – один

2 – два