

## Лекція 3.

### Диференціюючі кола імпульсної електроніки.

**Мета лекції:** вивчення диференціюючих кіл та їх характеристик.

План лекції:

- 3.1. Ідеальне диференціююче коло.
- 3.2. Пасивні диференціюючі кола.
- 3.3. Реакції диференціюючого кола на вхідні впливи у вигляді:
  - 3.3.1. стрибка напруги;
  - 3.3.2. одиночного імпульсу;
  - 3.3.3. експоненціального імпульсу.
- 3.4. Вплив зовнішніх елементів на операцію диференціювання.
- 3.5. Підвищення точності диференціювання.
- 3.6. Додаток. Довідкова таблиця перетворень Лапласа.
- 3.7. Контрольно-навчальний тест до лекції 3.

### 3.1. Ідеальне диференціююче коло.

Диференціюючим колом називається чотириполюсник, сигнал на виході якого пропорційний похідній від вхідного сигналу. Іншими словами, вихідний сигнал диференціатора пропорційний швидкості зміни його вхідного сигналу

$$U_{\text{вих}}(t) = m \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}, \quad (3.1)$$

де  $m$  - коефіцієнт пропорційності.

Ідеальним диференціюючим колом є конденсатор без втрат (рисунок 3.1), який перетворює прикладену до нього вхідну напругу в струм, який змінюється пропорційно похідній  $dU_{\text{вх}}/dt$ .

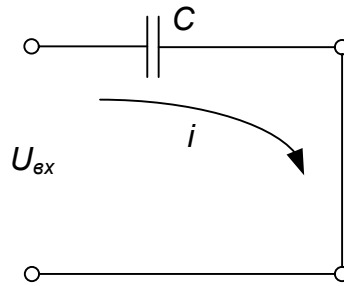


Рисунок 3.1 - Ідеальне диференціююче коло.

Побудуємо графіки АЧХ та ФЧХ ідеального диференціюючого кола (рисунок 3.2). Для цього знайдемо коефіцієнт передачі  $K(p) = K_0 p \tau$  в операторному вигляді; формальною заміною  $p = j\omega$  - у комплексному вигляді  $K(j\omega) = K_0 j\omega \tau$ .

Знайдемо модуль  $K(\omega) = K_0 \omega \tau$  та аргумент  $\varphi = 90^\circ$  коефіцієнта передачі.

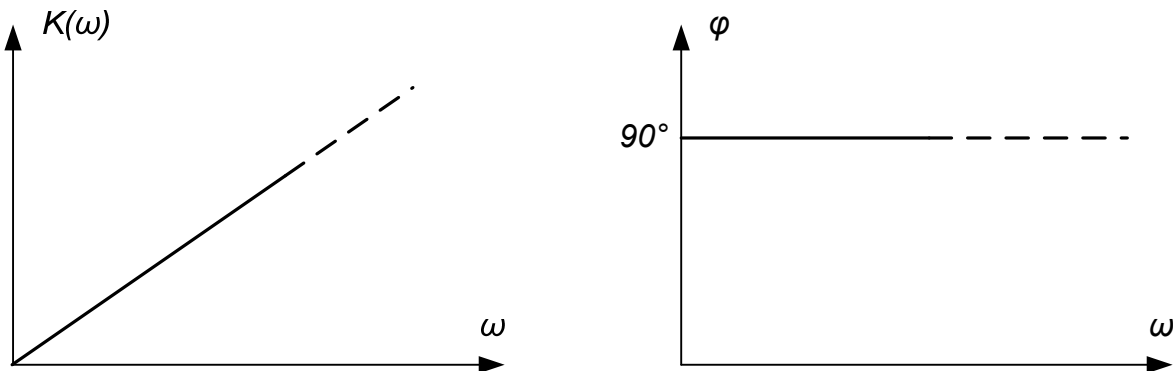


Рисунок 3.2 - АЧХ та ФЧХ ідеального диференціюючого кола.

### 3.2. Пасивні диференціюючі кола.

Найпростіше диференціююче  $RC$  - коло аналогічне інтегруючому  $RC$  - колу з різницею у тому, що вихідна напруга знімається не з конденсатора, а з активного опору (рисунок 3.3а). При цьому опір резистора  $R$  повинен бути досить малим, щоб  $U_{\text{вих}} = iR$  змінювалася за законом, близьким до (3.1). Напруга на виході кола

$$U_{\text{вих}} = iR = RC \frac{dU_C}{dt},$$

де напруга на конденсаторі  $U_C = U_{\text{вх}} - U_{\text{вих}}$ .

Тому

$$U_{\text{вих}}(t) = RC \left( \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} - \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} \right).$$

Якщо  $\left| \frac{dU_{\text{вих}}}{dt} \right| \ll \left| \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} \right|$ , то

$$U_{\text{вих}}(t) \approx RC \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

Підставивши значення  $U_{\text{вих}}(t)$  в попередню нерівність, отримаємо

$$RC \left| \frac{d^2 U_{\text{вх}}}{dt^2} \right| \ll \left| \frac{dU_{\text{вх}}}{dt} \right|.$$

Із отриманого виразу випливає, що для застосування  $RC$  - кола як диференціюючого необхідно, щоб стала часу  $\tau = RC$  була якомога меншою. Але при цьому буде зменшуватися і вихідна напруга  $U_{\text{вих}}(t)$ .

При диференціюванні найбільша похибка виникає під час наростання (або зрізу) імпульсу. Це зумовлено тим, що при цих процесах друга похідна, що виражає швидкість зміни крутизни фронту (або зрізу), має найбільше значення. Найменша похибка має місце на тих проміжках часу, де швидкість зміни вхідного сигналу  $U_{\text{вх}}(t)$  постійна.

Розглянемо два приклади диференціюючих кіл (рисунок 3.3), виведемо їх коефіцієнти передачі та сформулюємо умову, за якої ці кола є диференціюючими.

Побудуємо графіки АЧХ та ФЧХ реального диференціюючого кола (рисунок 3.4). Для цього, формальною заміною  $p = j\omega$  представимо коефіцієнт передачі у комплексному вигляді  $K(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$ . Знайдемо модуль  $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}}$

та аргумент  $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega\tau}$  коефіцієнта передачі.

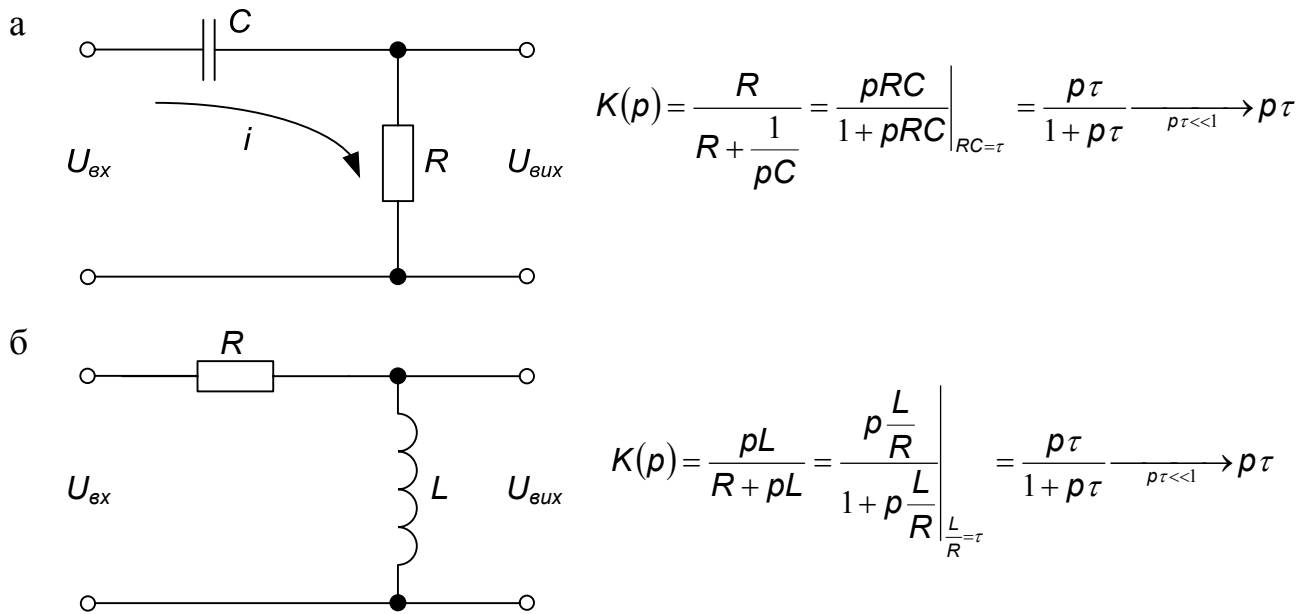


Рисунок 3.3 - Диференціююче коло.

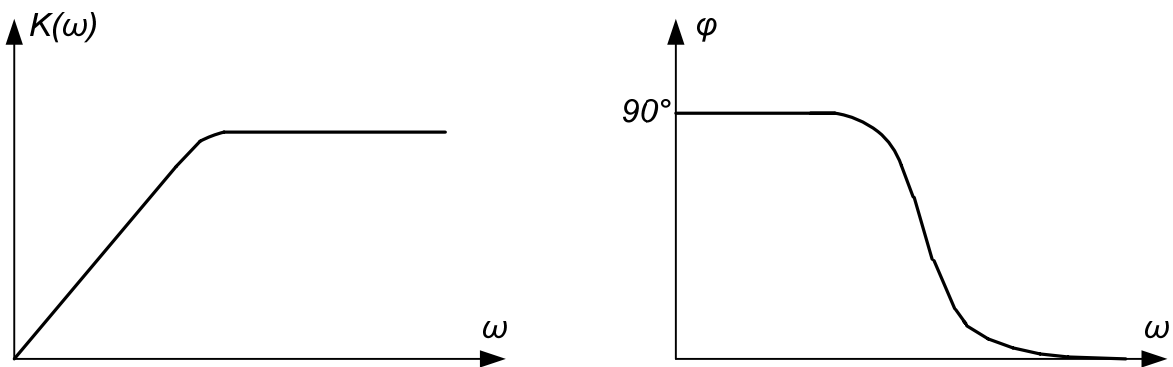


Рисунок 3.4 - АЧХ та ФЧХ реального диференціюючого кола.

### 3.3. Реакції диференціюючого кола на випробувальні сигнали.

#### 3.3.1. Реакція на стрибок вхідної напруги.

Розглянемо диференціювання стрибка напруги (рисунок 3.5а).

Математична похідна в точці  $t = 0$  дорівнює  $\infty$ , у решті точок вона дорівнює нулю.

У реальному диференціюючому  $RC$  - колі вихідна напруга  $U_{\text{вих}}(t)$  визначається процесами заряду і розряду конденсатора  $C$ . Напруга на виході диференціюючого кола  $U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}} \cdot e^{-t/\tau}$ .

Графік вихідної напруги наведено на рисунку 3.5б.

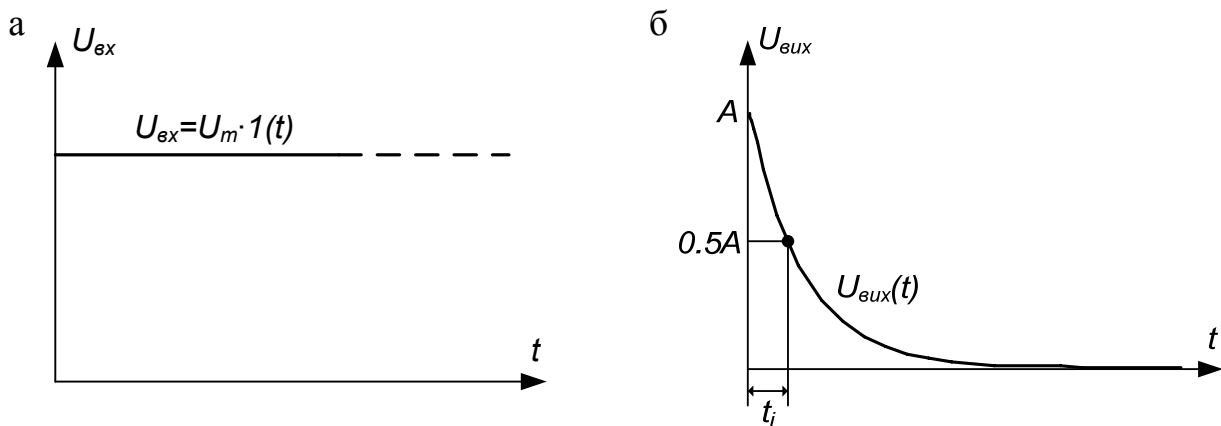


Рисунок 3.5 - Диференціювання стрибка напруги.

Приклад 1. Розрахувати тривалість імпульсу на виході диференціюючого кола.

Розв'язання:  $Ae^{-\frac{t_i}{\tau}} = 0.5A,$

$$e^{-\frac{t_i}{\tau}} = 0.5,$$

$$\frac{-t_i}{\tau} = \ln(0.5),$$

$$t_i = -\tau \cdot \ln(0.5),$$

$$t_i \approx 0.7\tau.$$

3.3.2. Диференціювання одиночного прямокутного імпульсу.

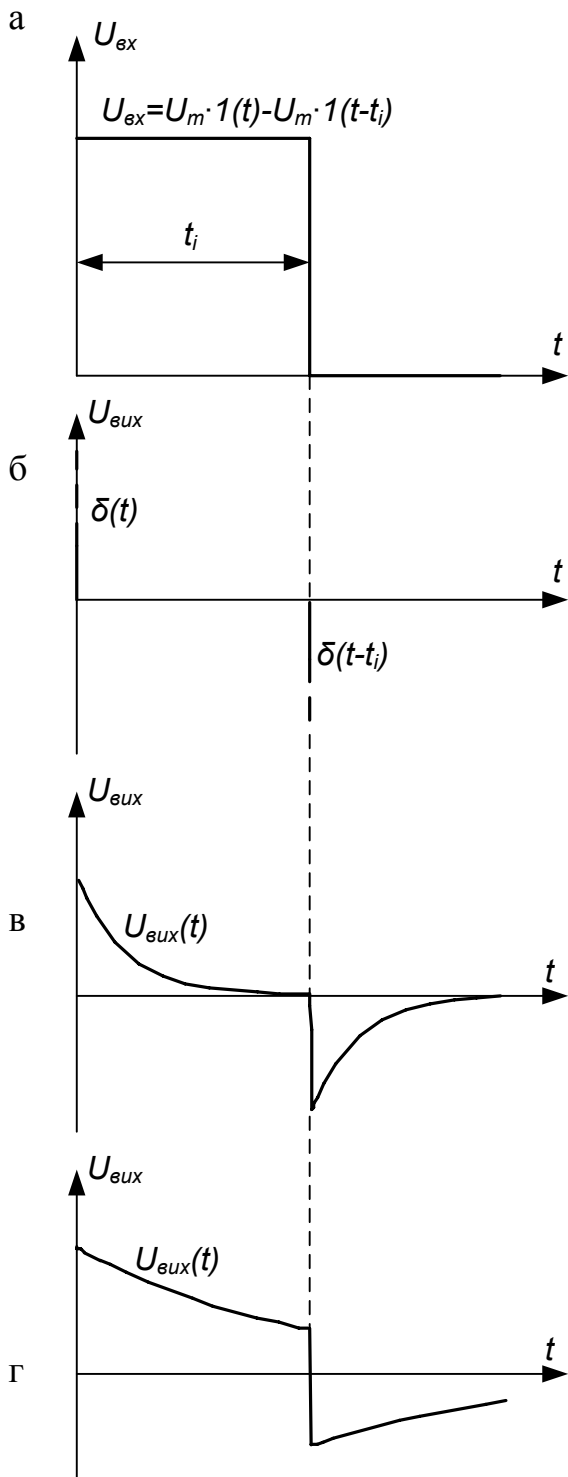


Рис. 3.6. Диференціювання одиночного імпульсу.

Одиначний прямокутний імпульс (рисунок 3.6а) можна представити у вигляді суми стрибків  $U_{ex}(t) = U_m(1(t) - 1(t - t_i))$ . Математична похідна в точках  $t = 0$  і  $t = t_i$  дорівнює  $\infty$ , у решти точок вона дорівнює нулю (рисунок 3.6б).

У реальному диференціюючому  $RC$  - колі вихідна напруга  $U_{вих}(t)$  визначається процесами заряду і розряду конденсатора  $C$ . Напруга на виході диференціюючого кола

$$U_{вих}(t) = U_{ex}(t) - U_C(t),$$

$$U_{вих}(t) = U_m \cdot e^{-t/\tau} \cdot 1(t) - U_m \cdot e^{-(t-t_i)/\tau} \cdot 1(t-t_i).$$

Графік вихідної напруги наведено на рисунку 3.6в.

Може статися, що на момент закінчення вхідного імпульсу  $t = t_i$  конденсатор не встигне повністю зарядитися, тоді графік вихідної напруги буде мати вигляд показаний на рисунку 3.6г. Таке коло називається перехідним. Для вирішення цієї проблеми необхідно: зменшити сталу часу  $\tau = RC$  або збільшити тривалість імпульсу  $t_i$ .

Максимальна похибка диференціювання спостерігається в точках  $t = 0$  і  $t = t_i$ , оскільки для ідеального кола вихідний сигнал нескінчений у цих точках, а реально не може перевищувати  $\pm U_m$ .

### 3.3.3. Диференціювання експоненціального імпульсу.

Розглянемо випадок диференціювання імпульсу, фронт якого змінюється за законом експоненти (рисунок 3.7а)

$$U_{ex}(t) = U_m \left( 1 - e^{-t/\tau_\phi} \right) \text{ при } t \geq 0,$$

де  $\tau_\phi$  – постійна часу, що визначає тривалість фронту.

Результат диференціювання такого сигналу ідеальним диференціюючим колом

$$U_{вих\tau}(t) = K \frac{dU_{ex}}{dt} = K \frac{U_m}{\tau_\phi} e^{-t/\tau_\phi} \quad (3.2)$$

являє собою експоненціальний імпульс (рисунок 3.7б).

Результат диференціювання реальним  $RC$  - колом може бути знайдений на основі інтеграла Дюамеля

$$U_{\text{вих}}(t) = \frac{U_m}{\left(\tau_{\phi} / \tau\right)^{-1}} \left( e^{-t/\tau_{\phi}} - e^{-t/\tau} \right), \quad (3.3)$$

де  $\tau = RC$  стала часу диференціюючого кола.

Імпульс такої форми називається двоекспоненціальним. Похибка диференціювання

$$\Delta U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вих}\tau}(t) - U_{\text{вих}}(t).$$

Із (3.2) та (3.3)

$$K = \frac{\tau \tau_{\phi}}{\tau_{\phi} - \tau}.$$

Тоді

$$\Delta U_{\text{вих}}(t) = \frac{\tau}{\tau_{\phi} - \tau} U_m e^{-t/\tau}.$$

Тобто похибка диференціювання тим менша, чим менша стала часу  $RC$  - диференціюючого кола.

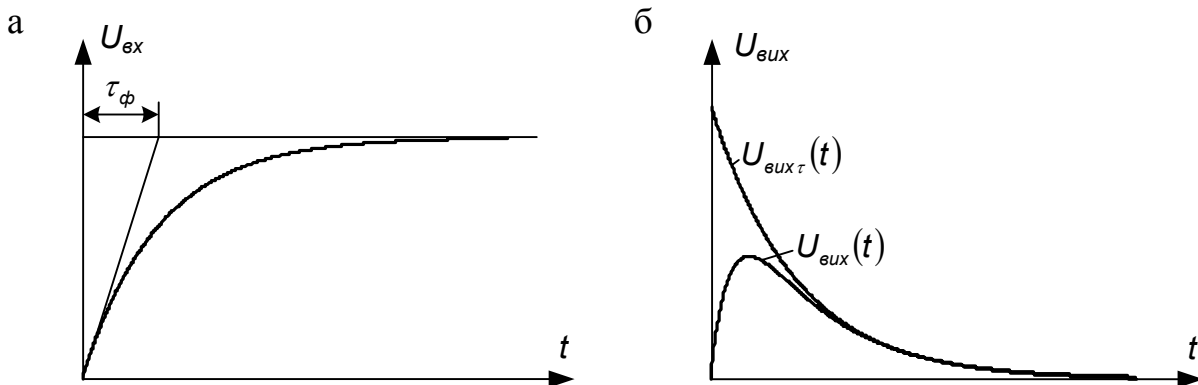


Рисунок 3.7 - Диференціювання експоненціального імпульсу.

#### 3.4. Вплив зовнішніх елементів на операцію диференціювання.

Схема зображена на рисунку 3.3а не може функціонувати сама по собі. Для живлення такої схеми використовується, наприклад, джерело напруги, яке має



певний внутрішній опір. На виході такого кола вмикається навантаження, яке може мати як резистивний так і ємнісний характер (рисунок 3.8).

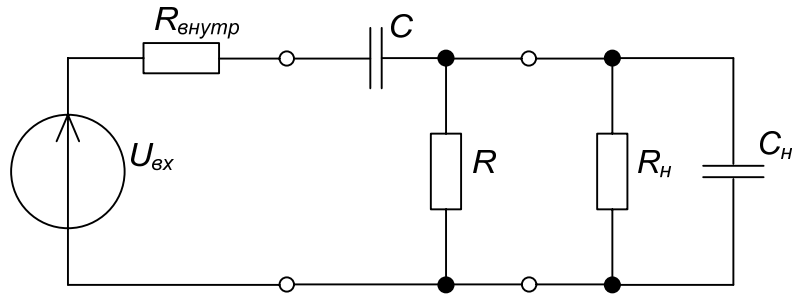
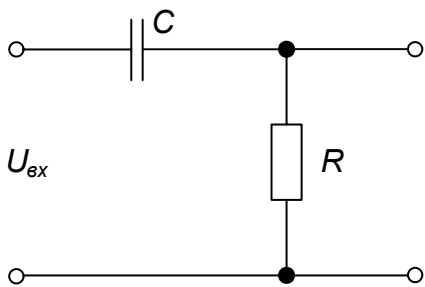


Рисунок 3.8 - Вплив зовнішніх елементів на операцію диференціювання.

Розглянемо як впливають зовнішні елементи на операцію диференціювання.

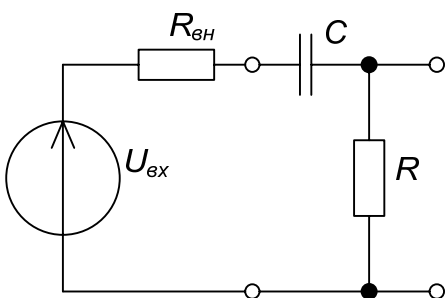
Номінальне (без зовнішніх елементів) диференціююче RC - коло.



$$K(p) = \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1 + pRC}$$

$$\tau = RC$$

Вплив внутрішнього опору джерела вхідної напруги  $R_{вн.}$ .



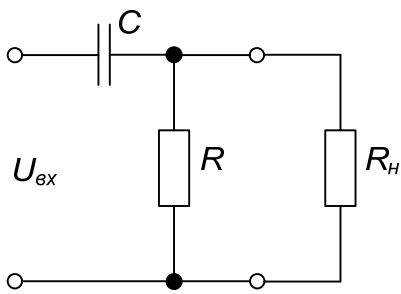
$$K(p) = \frac{R}{R + R_{вн.} + \frac{1}{pC}} = \frac{pRC}{1 + pC \cdot (R + R_{вн.})}$$

$$\tau' = C \cdot (R + R_{вн.})$$

$$\tau' > \tau$$

операція диференціювання погіршується.

Вплив опору навантаження  $R_H$ .



$$K(p) = \frac{(R // R_H)}{(R // R_H) + \frac{1}{pC}} =$$

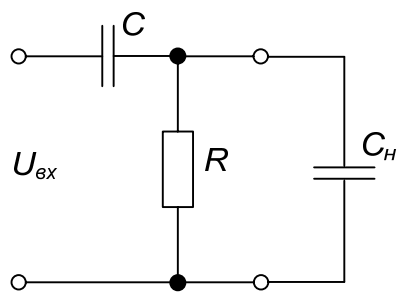
$$= \frac{pC \frac{R \cdot R_H}{R + R_H}}{1 + pC \frac{R \cdot R_H}{R + R_H}}$$

$$\tau' = C \frac{R \cdot R_H}{R + R_H}$$

$$\tau' < \tau$$

операція дифере-  
нціювання по-  
кращується.

Вплив ємнісного навантаження  $C_H$ .



$$K(p) = \frac{\left( R // \frac{1}{pC_H} \right)}{\left( R // \frac{1}{pC_H} \right) + \frac{1}{pC}} =$$

$$= \frac{pCR}{1 + pR(C + C_H)}$$

$$\tau' = R \cdot (C + C_H)$$

$$\tau' > \tau$$

операція дифере-  
нціювання погі-  
ршується.

### 3.5. Підвищення точності диференціювання.

Для підвищення точності диференціювання застосовують схему на операційному підсилювачі (ОП) (рисунок 3.9).

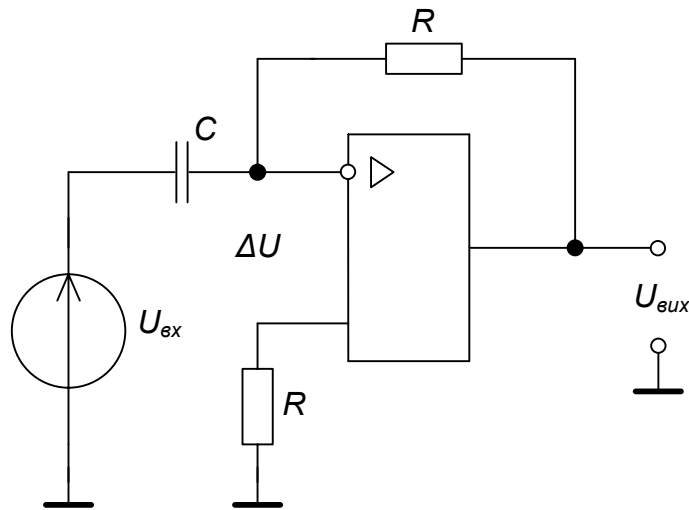


Рисунок 3.9 - Диференціатор на операційному підсилювачі.

Знайдемо вихідну напругу даної схеми:

$$\Delta U = \Delta U' + \Delta U'',$$

$$\text{де } \Delta U' = U_{\text{вх}} \frac{R}{R + \frac{1}{pC}} \quad \text{і} \quad \Delta U'' = U_{\text{вих}} \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}}.$$

Вихідна напруга:

$$U_{\text{вих}} = -\Delta U \cdot K_{\text{ОП}},$$

де  $K_{\text{ОП}}$  - коефіцієнт підсилення операційного підсилення.

Після підстановки отримаємо вираз для вихідної напруги:

$$U_{\text{вих}} = -\Delta U \cdot K_{\text{ОП}} = -U_{\text{вх}} \frac{p\tau}{1 + p\tau} K_{\text{ОП}} - U_{\text{вих}} \frac{1}{1 + p\tau} K_{\text{ОП}}$$

$$U_{\text{вих}} = -\frac{U_{\text{вх}} \frac{p\tau}{1 + p\tau} \cdot K_{\text{ОП}}}{1 + \frac{K_{\text{ОП}}}{1 + p\tau}} = -U_{\text{вх}} \frac{p\tau \cdot K_{\text{ОП}}}{1 + K_{\text{ОП}} + p\tau}.$$

Зважаючи, що  $(1 + K_{\text{ОП}}) \gg p\tau$  і  $U_{\text{вих}} \approx U_{\text{вх}} p\tau$ , то в такій схемі операція диференціювання буде більш точною ніж у схемі пасивного кола рисунка 3.3а.

Порівняння інтегрування та диференціювання на ОП за якістю виконання математичних операцій.

В реальних умовах операція інтегрування реалізується більш точно (краще) порівняно зі схемою диференціювання, т. я. при інтегруванні ОП маючи свою сталу часу покращує операцію інтегрування, а при диференціюванні навпаки погіршує.

### 3.6. Довідкова таблиця деяких перетворень Лапласа.

	Оригінал	Зображення
1.	$A_0 \delta(t)$	$A_0$
2.	$A_0 1(t)$	$A_0/p$
3.	$A_0 e^{-\alpha t}$	$\frac{A_0}{p + \alpha}$
4.	$\frac{A_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{A_0}{p(p + \alpha)}$
5.	$\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}$	$\frac{p}{p + \alpha}$
6.	$A_0 t e^{-\alpha t}$	$\frac{A_0}{(p + \alpha)^2}$
7.	$\frac{A_0}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$	$\frac{A_0}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
8.	$\frac{\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}}{\alpha - \beta}$	$\frac{p}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
9.	$A_0 \cos \omega_0 t$	$\frac{A_0 p}{p^2 + \omega_0^2}$
10.	$A_0 \sin \omega_0 t$	$\frac{A_0 \omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
11.	$A_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\frac{A_0 (p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
12.	$A_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\frac{A_0 \omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$

### 3.7. Контрольно-навчальний тест до лекції 3.

#### Питання 3.1

Якою повинна бути АЧХ ідеального диференціатора?

Вибір правильної відповіді:

- 1 - Гіперболічною.
- 2 - Лінійно-зростаючою.
- 3 - Логарифмічною.

#### Питання 3.2

Якою повинна бути ФЧХ ідеального диференціатора?

Вибір правильної відповіді:

- 1 - Сталою з  $90^\circ$  зсувом.
- 2 - Сталою з  $-90^\circ$  зсувом.
- 3 - Лінійно-зростаючою.

#### Питання 3.3

Що буде на виході ідеального диференціюючого кола, якщо на його вхід подати стрибок напруги?

Вибір правильної відповіді:

- 1 -  $U_{вих} = 1(t)$  (функція Хевісайда).
- 2 -  $U_{вих} = \delta(t)$  (дельта-функція).
- 3 -  $U_{вих} = \Gamma(t)$  (Гамма-функція)

#### Питання 3.4

Чому дорівнює тривалість імпульса після диференціювання стрибка напруги  $1(t)$ ?

Вибір правильної відповіді:

- 1 -  $t_i = 0.5\tau$ .
- 2 -  $t_i = 3\tau$ .
- 3 -  $t_i = 0.7\tau$ .

#### Питання 3.5

Що необхідно зробити для покращення операції диференціювання при наявності RL - кола?

Вибір правильної відповіді:

- 1 - Збільшувати L.
- 2 - Зменшувати R.
- 3 - Зменшувати сталу часу  $\tau = L/R$ .

Питання 3.6

Які елементи у схемі рисунок 3.8 погіршують операцію диференціювання?

Питання 3.7

На схему диференціюючого кола подано імпульси типу меандр. Якої форми буде сигнал на виході цього кола?

Питання 3.8

Чому дорівнює напруга на виході схеми рисунка 3.9 при  $U_{\text{вх.}} = 0$ ?

Питання 3.9

Як впливає внутрішня інерційність операційного підсилювача на операцію диференціювання в схемі рисунка 3.9?

Вибір правильної відповіді:

1 -  $R_H$ .

2 -  $R_{\text{внутр.}}, C_H$ .

Вибір правильної відповіді:

1 - Прямокутні імпульси зі згладженими фронтами.

2 - Імпульси трикутної форми.

3 - Послідовність різнополярних експоненціальних імпульсів.

Вибір правильної відповіді:

1 - 0.

2 -  $\approx U_{\text{зм.}}$

3 -  $\infty$

Вибір правильної відповіді:

1 - Покращує.

2 - Погіршує.

3 - Не впливає.