

## Лекція 2

### Аналіз похибок структурних схем засобів вимірювань

План лекції

- 2.1. Схема прямого перетворення.
- 2.2. Одноканальна схема.
- 2.3. Багатоканальна схема.
- 2.4. Замкнена структурна схема.

#### 2.1. Схема прямого перетворення

Найбільш розповсюджена схема у вимірвальній техніці - схема рис.1.3 а. На прикладі цієї схеми розглянемо детально методику аналізу похибок структурних схем вимірвальних пристроїв (ВП).

На першому етапі аналізу складають рівняння вимірвального перетворення  $y = f(x)$  і для лінійних схем коефіцієнт перетворення в операторній формі

$$K_{\Sigma}(p) = y(p)/x(p) = K_1(p) \dots K_i(p) \dots K_n(p) = \prod_{i=1}^n K_i(p)$$

З останнього рівняння одержують рівняння в статиці  $K_{\Sigma}(o) = \prod_{i=1}^n K_i(o)$ .

На другому етапі знаходять вираз для мультиплікативної похибки системи в цілому за допомогою часткових мультиплікативних похибок блоків. Для цього введемо такі позначення:

$$K_{\Sigma} = K_{\Sigma_0} + \Delta K_{\Sigma} = K_{\Sigma_0} \left(1 + \frac{\Delta K_{\Sigma}}{K_{\Sigma_0}}\right) = K_{\Sigma_0} (1 + \gamma_{\Sigma}),$$

де  $K_{\Sigma_0}$  - розрахункове ідеальне значення коефіцієнта перетворення вимірвального пристрою,  $\Delta K_{\Sigma}$  - його приріст під впливом дестабілізуючих факторів. Так само:

$$K_i = K_{i0} + \Delta K_i = K_{i0} \left(1 + \frac{\Delta K_i}{K_{i0}}\right) = K_{i0} (1 + \gamma_i)$$

Тоді  $K_{\Sigma}(p) = K_{\Sigma_0}(1 + \gamma_{\Sigma}) = \prod_{i=1}^n K_{i0}(1 + \gamma_i)$ . Нехтуючи добутком похибок у зв'язку з їх малістю, отримуємо  $(1 + \gamma_i) \approx (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_i + \dots + \gamma_n)$ , але

$$K_{\Sigma_0} = \prod_{i=1}^n K_{i0}, \text{ тоді } \gamma_{\Sigma} = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i \quad (1.1)$$

Таким чином мультиплікативна похибка структури прямого перетворення дорівнює сумі часткових мультиплікативних похибок блоків.

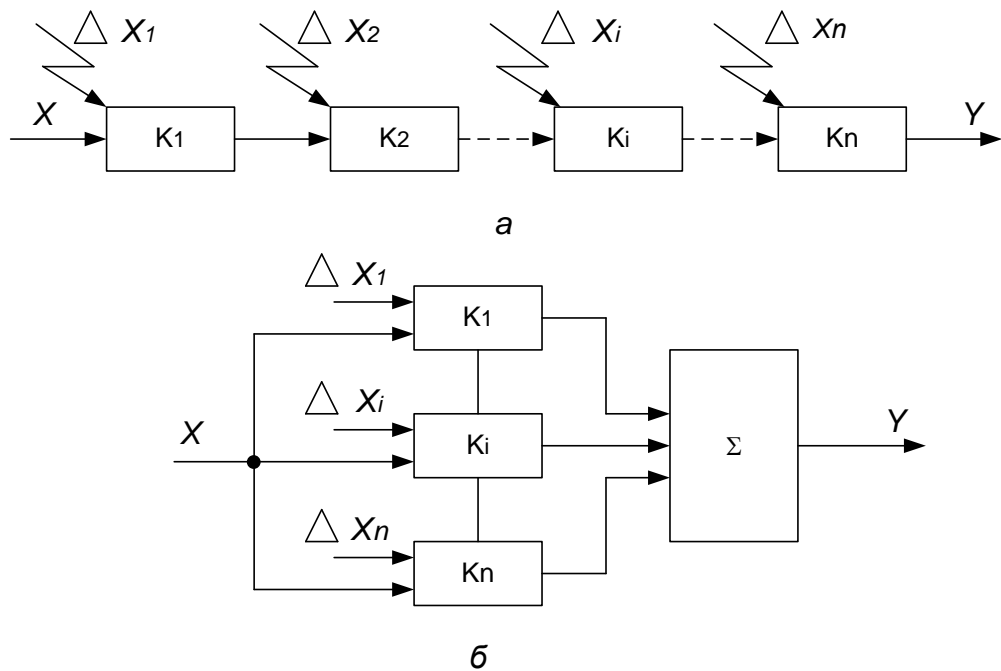


рис.1.3 Схеми прямого перетворення:  
*a* - одноканальна; *б* - багатоканальна.

На третьому етапі знаходять вираз для адитивної приведенної до входу і до вимірювальної величини похибки ВП. На рис.1.3,а часткові абсолютні адитивні похибки блоків позначені як  $\Delta x_i$ . Можна записати приріст вихідної величини з урахуванням сукупності  $\Delta x_i$ , як

$$\Delta y = \Delta x_1 \prod_{i=1}^n K_i + \Delta x_2 \prod_{i=2}^n K_i + \dots + \Delta x_n K_n.$$

Відносна адитивна похибка, приведена до входу і до вимірювальної величини

$$\delta_{\Sigma} = \frac{\Delta y}{x \cdot \prod_{i=1}^n K_i} = \frac{\Delta x_1}{x} + \frac{\Delta x_2}{x \cdot K_1} + \frac{\Delta x_3}{x \cdot K_1 \cdot K_2} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x \cdot \prod_{i=1}^{n-1} K_i}. \quad (1.2)$$

З виразу (1.2) випливає, що коли  $K > 1$  найбільш вагомо сумарна адитивна похибка залежить від адитивної похибки вхідних блоків, з цієї причини вони повинні виконуватись більш досконало (застосовують екранування, малозумні елементи, різного роду компенсації, особливі режими роботи і т.п.).

При великому  $K_1$ , та  $K_i$  того ж порядку вираз (1.2) замінюють на

$$\delta_{\Sigma} \approx \frac{\Delta x_1}{x} \quad (1.3)$$

та користуються їм у подальших розрахунках.

Вирази (1.1- 1.3) отримані при детермінованому аналізі похибок. Вони є необхідні, але недосконалі, тому що не враховують випадкову природу похибок. Тому на четвертому етапі переходять до складання виразів похибок з урахуванням математичного очікування та дисперсії часткових похибок блоків. Якщо апріорі відомі знаки математичних очікувань

мультиплікативних похибок, то математичне очікування сумарної мультиплікативної похибки знаходиться за формулою:

$$M[\gamma_{\Sigma}] = \sum_{i=1}^n M[\gamma_i] \quad (1.4)$$

Якщо знаки  $M[\gamma_i]$  невідомі і  $y_i$  не залежні між собою, то доречно застосувати геометричне додавання похибок, а саме

$$M[\gamma_{\Sigma}] = \sqrt{\sum_{i=1}^n M^2[\gamma_i]}. \quad (1.5)$$

Вираз (1.5) є основним розрахунковим співвідношенням для систематичної складової мультиплікативної похибки.

Дисперсію випадкової складової  $\gamma_{\Sigma}$  при незалежних  $\gamma_i$  можна представити, як:

$$D[\gamma_{\Sigma}] = D[\gamma_1] + D[\gamma_2] + \dots + D[\gamma_n] = \sum_{i=1}^n D[\gamma_i] \quad (1.6)$$

Звідси середньоквадратичне значення

$$\sigma[\gamma_{\Sigma}] = \sqrt{\sum_{i=1}^n D[\gamma_i]} \quad (1.7)$$

Вираз (1.7) при аналізі ВП використовується рідко, тому що у більшості випадків  $\sigma[\gamma_{\Sigma}]$  мала, в порівнянні з адитивною випадковою похибкою.

Систематична адитивна відносна похибка у відповідності з виразом (1.3)

$$M[\delta_{\Sigma}] \approx \frac{M[\Delta x_1]}{x} \quad (1.8)$$

Випадкова адитивна похибка на виході ВП може бути визначена за формулою

$$D[\Delta x] = \int_0^{\infty} G(\omega)_{\text{ВХ}} \cdot |K(\omega)|^2 \cdot d\omega = \sigma^2[\Delta x], \quad (1.9)$$

де  $G(\omega)_{\text{ВХ}}$  - спектральна густина шумів на вході ВП,  $|K(\omega)|^2$  - квадрат модуля передаточної характеристики ВП у функції від частоти  $\omega$ .

Так, наприклад, якщо коефіцієнт перетворення ВП описується виразом

$$K_{\Sigma}(\omega) = K_{\Sigma_0} / (1 + j\omega\tau),$$

де  $\tau$  - стала часу, та на вході ВП діє «білий» шум  $G(\omega)_{\text{ВХ}} = G_0$ , то

$$D[\Delta x] = \int_0^{\infty} G_0 \cdot \frac{K_{\Sigma_0}^2 \cdot d\omega}{\left[ \sqrt{1 + (\omega \cdot \tau)^2} \right]^2} = K_{\Sigma_0}^2 \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G_0}{\tau}. \quad (1.10)$$

Середньоквадратичне значення адитивної похибки (шумів) на виході

$$\text{ВП } \sigma[\Delta x] = K_{\Sigma_0} \sqrt{\frac{\pi \cdot G_0}{2\tau}}. \quad (1.11)$$

Середньоквадратичне значення адитивної похибки, приведені до входу та до вимірювальної величини

$$\sigma[\delta(\Delta x)] = \frac{K_{\Sigma_0} \sqrt{\frac{\pi \cdot G_0}{2\tau}}}{K_{\Sigma_0} \cdot x} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\pi \cdot G_0}{2\tau}}. \quad (1.12)$$

Таким чином, для знаходження адитивної похибки ВП необхідно знайти модуль коефіцієнта перетворення через значення сталих часу  $\tau_i$ , знаючи або задаючись спектральною густиною  $G(\omega)_{BX}$  шумів на вході ВП, використовують вирази (1.9), (1.12).

На п'ятому етапі необхідно сформулювати вимоги до похибок кожного блоку ВП. Використовуючи вираз (1.5) та знаючи  $M[\gamma_\Sigma]$ , необхідно загальну мультиплікативну похибку розподілити на усі блоки ВП, або знаючи  $M[\gamma_\Sigma]$  та деякі  $M[\gamma_i]$ , визначити похибки решти блоків. Те саме стосується адитивної похибки.

Таким чином результатом п'ятого етапу є чітке визначення вимог до блоків з адитивної та мультиплікативної похибок. Отримані дані використовуються при конкретному розрахунку та виборі елементів схеми кожного блоку.

На шостому етапі проводять аналіз динамічних характеристик ВП. Динамічні характеристики засобів вимірювання (ЗВ) розподіляють на повні та часткові.

“Повна динамічна характеристика засобу вимірювання” - це характеристика, що повністю вимагає зміну в часі сигналу на виході, коли відома зміна, сигналу на вході ЗВ. Прикладами є передаточна функція, сукупність амплітудно- і фазочастотної характеристики, імпульсна характеристика, перехідна характеристика, диференційне рівняння. Часткова динамічна характеристика - це “параметр повної динамічної характеристики або її функціонал” [1]. Одним з прикладів часткової динамічної характеристики є час установлення (час перетворення) вихідного сигналу на вході ЗВ при стрибкоподібній зміні сигналу на вході ЗВ. Часткові динамічні характеристики знайшли широке застосування у нормуванні характеристик ЗВ. Зокрема, у аналогових вимірювальних приладах

використовують таку динамічну характеристику як час установлення  $t_y$ . Цю характеристику також рекомендовано використовувати студентам під час розрахунку вузлів ВП.

Якщо ВП характеризується однією сталою часу  $\tau$  і коефіцієнт передачі  $K(p) = K_0 / (1 + p\tau)$ , то вихідний сигнал  $y(t)$  може бути виражений як  $y(t) = x(1 - e^{-t/\tau})$ , коли на вхід ВП подається стрибок  $x$ . Член  $e^{-t/\tau} = \gamma_\partial$  - відносна динамічна похибка, яка має мультиплікативний характер. Час установлення  $t_y$  знаходимо з виразу:

$$e^{-t_y/\tau} = \gamma_\partial, \quad t_y = \tau \cdot \ln \frac{1}{\gamma_\partial}. \quad (1.13)$$

Якщо ВП характеризується двома сталими часу  $\tau_1, \tau_2$  то коефіцієнт передачі:

$$K(p) = \frac{K_0}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}.$$

Реакція на стрибок  $x$ :

$$y(t) = x \cdot K_0 \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right] 1_0(t)$$

Час устанавлення, коли задана динамічна похибка, може бути знайдено з виразу:

$$\gamma_{\vartheta} = \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t_y/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t_y/\tau_2}. \quad (1.14)$$

В тому випадку, коли ВП характеризується одним коливальним колом, то реакцією на стрибок  $x$  є

$$y(t) = x \cdot \left[ 1 - e^{-\beta t} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \arctg \frac{\omega}{\beta}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2} \right] 1_0(t), \quad (1.15)$$

де  $\omega$  - власна частота коливань ВП,  $\beta$  - коефіцієнт затухання. Максимуми динамічних похибок у виразі (1.15) спостерігаються, коли  $\sin\left(\omega \cdot t + \arctg \frac{\omega}{\beta}\right) = 1$ , тоді час устанавлення:

$$t_y = -\frac{1}{\beta} \cdot \ln \frac{\gamma_{\vartheta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}}. \quad (1.16)$$

Таким чином, використовуючи вирази (1.13, 1.14, 1.16) та величини, які надані в технічному завданні, в більшості випадків можна розрахувати невідомі величини та сформулювати вимоги щодо динаміки до блоків ВП. При нагоді зауважимо, що частіше у ВП більш інерційними вузлами є вихідний стрілковий показчик та попереду включений детектор (перетворювач).

### 2.3. Багатоканальна схема

Окрім структурної схеми рис.1.3а у ВП використовується ряд інших схем, наприклад, така яка зображена на рис.1.3 б. Аналіз такої схеми робиться так само, як і попередньої. Але є ряд особливостей.

Схема 1.3б використовується при паралельному з'єднанні підсилювачів постійного струму (ППС) з метою зменшення дрейфу нуля та шумів ППС,

Мультиплікативна систематична похибка:

$$M[\gamma_{\Sigma}] = \frac{K_{10}}{K_{\Sigma_0}} M[\gamma_1] + \frac{K_{20}}{K_{\Sigma_0}} M[\gamma_2] + \dots + \frac{K_{n0}}{K_{\Sigma_0}} M[\gamma_n] = \frac{1}{K_{\Sigma_0}} \sum_{i=1}^n K_{i0} M[\gamma_i]$$

Систематична адитивна похибка:

$$M[\delta_{\Sigma}] = \frac{1}{x \cdot K_{\Sigma}} \sum_{i=1}^n K_i \cdot M[\Delta x_i].$$

Дисперсію шумів на виході кожного каналу, коли є одна стала часу  $\tau$ , та „білий” шум на вході можна представити через вираз (1.10). Сукупна дисперсія на виході схеми

$$D_{\Sigma}[\Delta x] = \sum_{i=1}^n D[\Delta x_i] = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^n K_i^2 \frac{G_{0i}}{\tau_i}.$$

Якщо прийняти, що  $K_1 = K_2 = K_i = K_n = K$ ,  $G_{01} = G_{02} = G_{0i} = G_0$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_i = \tau$ , то:

$$D_{\Sigma}[\Delta x] = \frac{\pi}{2} K^2 \frac{n \cdot G_0}{\tau},$$

або

$$\sigma[\Delta x] = K \sqrt{\frac{\pi \cdot n \cdot G_0}{2\tau}}. \quad (1.17)$$

З виразу (1.17) випливає, що при паралельному з'єднанні каналів сумарний шум на виході став більше у  $\sqrt{n}$  раз, порівнюючи з одним каналом, але вихідний корисний сигнал  $x \cdot k \cdot n$  став більше у  $n$  раз, тому співвідношення сигнал - шум покращилося у  $\sqrt{n}$  порівнюючи з одноканальною структурою. Ця властивість зменшення адитивних шумів як раз використовується при паралельному з'єднанні підсилювачів, давачів і т.д.

Використовуючи схеми рис. 1.3а та 1.3б можна отримати комбіновані розімкнені схеми.

#### 2.4. Замкнена структурна схема (рис.1.4)

Більш високу точність можна отримати від замкнених структурних схем. Тут намагаються охопити як можна більшу кількість нестабільних лапок.

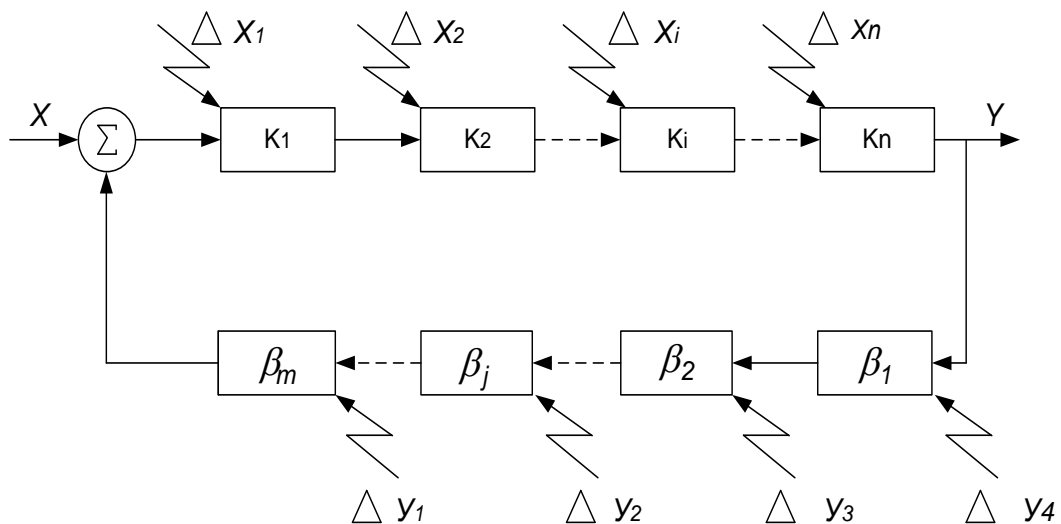


рис 1.4. Замкнена структурна схема.

Як відомо, мультиплікативна похибка системи, з від'ємним зворотнім зв'язком  $\gamma_{B33} \approx \gamma_k / (1 + k \cdot \beta) - \gamma_\beta$ , де  $\gamma_k$ ,  $\gamma_\beta$  - мультиплікативна похибка прямого та зворотнього кіл, відповідно,  $k\beta$  - петльове підсилення по контуру в цілому.

З урахуванням (1.2) систематичну мультиплікативну похибку схеми рис. 1.4 можна представити як

$$M[\gamma_{B33}] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n M^2[\gamma_i]}{(1 + \prod_{i=1}^n K_i \cdot \prod_{j=1}^m \beta_j)^2} + \sum_{j=1}^m M^2[\gamma_j]}, \quad (1.18)$$

де  $M[\gamma_j]$  - математичне очікування мультиплікативної похибки блоку  $\beta$  ланки зворотнього зв'язку.

Адитивну похибку визначимо з виразу:

$$y = x \cdot K_{3r} + \Delta x_1 \cdot K_{3r} + \Delta x_2 \cdot K_{3r} / K_1 + \Delta x_3 \cdot K_{3r} / K_1 \cdot K_2 + \dots + \Delta x_i \cdot K_{3r} / \prod_{i=1}^{i-1} K_i + \dots \\ + \Delta x_n \cdot K_n + \Delta y_1 \cdot K_{3r} \prod_{j=1}^m \beta_j + \Delta y_2 \cdot K_{3r} \prod_{j=2}^m \beta_j + \dots + \Delta y_j \cdot K_{3r} \prod_{j=1}^m \beta_j + \dots + \Delta y_m \cdot K_{3r} \cdot \beta_m,$$

де  $K_{3r} = K / (1 + k\beta)$  - коефіцієнт загального перетворення  $x$  в  $y$ ;

$$K = \prod_{i=1}^n K_i; \quad \beta = \prod_{j=1}^m \beta_j.$$

Відносна адитивна похибка приведена до входу і до вхідної величини  $x$ :

$$\delta = (y - x \cdot K_{3r}) / x \cdot K_{3r} = \frac{\Delta x_1}{x} + \frac{\Delta x_2}{x \cdot K_1} + \frac{\Delta x_3}{x \cdot K_1 \cdot K_2} + \dots \\ + \frac{\Delta x_i}{x} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{i-1} K_i} + \dots + \frac{\Delta x_n}{x} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} K_i} + \frac{\Delta y_1}{x} \cdot \prod_{j=1}^m \beta_j + \frac{\Delta y_2}{x} \cdot \prod_{j=2}^m \beta_j + \dots \\ + \frac{\Delta y_j}{x} \cdot \prod_{j=j}^m \beta_j + \dots + \frac{\Delta y_m}{x} \cdot \beta_m \quad (1.19)$$

З цього виразу можна зробити такий висновок. Якщо  $K_i > 1$  і  $\Delta x_i$  приблизно однакові, то найбільший вплив на загальну похибку мають блоки що розташовані ближче до входу схеми.

Для блоків  $\beta$  - кола, якщо  $\beta_j > 1$  і  $\Delta y_j$  приблизно однакові, найбільший вплив мають блоки, що розташовані ближче до виходу всієї схеми.

При різних  $K_i$ ,  $\beta_j$  вплив кожного з джерел  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  може бути різним і треба користуватись останнім виразом для визначення які блоки створюють найбільшу похибку всього пристрою.

Дисперсію шумів на виході схеми зі зворотнім зв'язком рис.1.4 визначають з виразу (1.9). Так для пристрою, що має одну еквівалентну сталу часу у прямому колі і  $\beta$  - коло - безінерційна ланка, при присутності «білого» шуму зі спектральною густиною  $G_0$

$$D[\Delta x_1]_{B33} = \frac{K^2}{1 + K \cdot \beta} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G_0}{\tau}.$$

Середньоквадратичне значення адитивного шуму на виході схеми рис. 1.4:

$$\sigma[\Delta x_1]_{B33} = \frac{K}{\sqrt{1+K\beta}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{G_0}{\tau}}. \quad (1.20)$$

Порівнюючи вирази(1.20) і (1.11) робимо такий висновок : якщо ВП з однією сталою часу охопити від'ємним зворотнім зв'язком (ВЗЗ), то це призведе до зменшення абсолютного значення середньоквадратичного значення шумів у  $\sqrt{1+K\beta}$  раз, але ураховуючи що в цей час коефіцієнт підсилення зменшується в  $1+K\beta$  раз, відносно значення шумів збільшується в  $\sqrt{1+K\beta}$  раз. Це трапилось внаслідок того, що розширилась смуга частот ВП із-за впливу ВЗЗ.